89

BILANGAN DAN FUNGSI BILANGAN KOMPLEKS

oleh
Tjutju Sutarno

DEPARTEMEN PENDIDIKAN DAN KEBDAYAAN
FMIPA
UNIVERSITAS TERBUKA
1987

DAFTAR ISI

BILANGAN DAN FUNGSI BILANGAN KOMPLEKS

I . SISTEM-SISTEM BILANGAN

Pada pelajaran SMTA, kita telah mengenal bilangan cacah seperti 0, 1, 2, 3, ... bilangan hitung: 1, 2, 3 ... yang kita sebut juga bilangan-bilangan natural, juga disebut bilangan bulat positif.

Operasi berhitung dari bilangan-bilangan sistem tersebut, tertutup dalam sistem itu yang berarti tidak keluar dari sistem tersebut.

Sistem bilangan bulat positif tertutup terhadap operasi perjumlahan dan perkalian (perbanyakan). Itu berarti bahwa, bila m dan n adalah bilangan bulat positif, maka:

$$m - n = p \text{ dan } m\,n = q \qquad (1)$$

juga adalah bilangan-bilangan bulat positif. Bila kedua buah bilangan bulat positif disebelah kiri persamaan (1) itu diketahui, maka kita dapat mengetahui pula bilangan bulat positif yang berada disebelah kanan (1).

Le i lanjut dalam hal ini , kadang-kadang kita dapat mengatakan khusus bilangan-bilangan bulat positif m dan p dapat menentukan sebuah bilangan bulat positif n, sehingga memenuhi $m + n = p$.

Misalnya $5 + n = 8$, dapat diselesaikan bila kita hanya menggunakan bilangan positif. Tetapi persamaan $8 + n = 5$ tdak dapat kita selesaikan, kecuali kalau sistem bilangan itu diperluas. Karena itu kita dengan imajinasi menemukan konsep-konsep bilangan yang dinyatakan dengan nol dan bilangan bulat negatif. Kemudian bilangan bulat positif, nol dan bilangan bulat negatif kita sebut semuanyaa itu adalah <u>bilangan bulat</u>.

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (2)$$

Kita akan dapat menyelesaikan persamaan $m + n = p$ bila dua buah dari bilangan bulat persamaan tadi diketahui.

Seandainya seseorang tahu bagaimana pernyataan setiap dua buah bilangan bulat dalam himpunan (2) di atas, dan misalkan dalam persamaan (1) itu, m dan q diberikan , ia tidak selalu akan mendapatkan n sebagai bilangan bulat.

Bilangan lain diperoleh adalah yang disebut <u>bilangan pecahan</u> yang pada umumnya dituliskan dengan $\frac{m}{n}$ dengan m dan n masing-masing bilangan bulat. Bilangan nol mempunyai sifat-sifat tersendiri yang sewaktu-waktu dapat menyesatkan kita, tetapi pada akhirnya dapat dikatakan, bahwa semuanya adalah merupakan perbandingan bilangan bulat $\frac{m}{n}$, kecuali jika penyebutnya nol. Jadi semua bilangan dapat dinyatakan dengan $\frac{m}{n}$ yang kedua-duanya bilangan bulat dan $n \neq o$. Sistem ini disebut himpunan <u>bilangan rasional</u>.

Dengan kata lain, bilangan rasional adalah bilangan yang dapat dinyatakan dengan $\frac{m}{n}$, dengan m dan n adalah bilangan bulat dan n tidak sama dengan nol. Setelah kita mengenal semua bilangan rasional, kita akan mudah mengenal operasi-operasinya, yang disebut operasi rasional untuk

1) penjumlahan, pengurangan
2) perkalian, pembagian pada setiap dua buah bilangan dalam suatu sistem, kecuali untuk pembaginya yang sama dengan nol.

Dalam Ilmu Ukur pada bujursangkar satuan (satuan persegi), teori Pythagoras dapat menunjukkan bahwa, kita dapat melukis sepenggal garis dalam berbagai satuan panjang, yang panjangnya sama dengan $\sqrt{2}$. Jadi kita dapat menyelesaikan persamaan

$$x^2 = 2. \tag{3}$$

dengan lukisan geometri. Tetapi dalan hal ini kita menemukan pula, bahwa penggal garis sepanjang $\sqrt{2}$ dan penggal garis yang menyatakan panjang 1 adalah kuantitas yang tak berbading. Ini berarti bahwa perbandingan $\sqrt{2/1}$ tidak dapat dari dua buah bilangan bulat, kelipatan dari yang satu dengan yang lainnya, rupanya lebih mendasar satuan dari panjang. Itulah kita tidak dapat menemukan sebuah bilangan rasional dari persamaan $x^2 = 2$.

Dengan demikian kita dapat menyatakan cara aljabar, bahwa tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya sama dengan dua.

Misal ada sebuah bilangan rasional yang memenuhi itu. Kemudian kita dapatkan bilangan bulat p dan q yang tidak mempunyai faktor perekutuan kecuali 1 dan sehingga

$$p^2 = 2q^2 \tag{4}$$

Asalkan p dan q bilangan bulat, p harus genap, misal $p = 2p_1$, dimana p_1 adalah sebuah bilangan bulat. Hal ini menghasilkan (4) menjadi

$$4p_1^2 = 2q^2$$

$$2p_1^2 = q^2$$

yang menyatakan, bahwa q harus genap pula, sebutlah $q = 2q_1$, dengan q_1 juga bilangan bulat. Tetapi hal ini bertentangan dengan pilihan kita, bahwa p dan q sebagai faktor persekutuan kecuali satuannya.

Maka jelaslah, bahwa tidak ada bilangan rasional yang kuadratnya sama dengan 2.

Sebuah baris bilangan rasional

$$\frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \ldots, \qquad (5)$$

yang kuadratnya berbentuk barisan

$$\frac{1}{1}, \frac{49}{25}, \frac{1681}{841}, \frac{57.121}{28.51}, \ldots, \qquad (6)$$

yang konvergen dengan 2 sebagai limit-limitnya. Imajinasi kita menyarankan bahwa kita memerlukan konsep sebuah limit dari sebuah barisan bilangan rasional. Bila kita menyetujui bahwa sebuah barisan yang monoton naik dalam baris mendekati sebuah limit, dan memperhatikan barisan (5) mempunyai sift-sifat tersebut, maka kita kehendaki barisan itu mempunyai sebuah limit L. Ini berarti pula bentuk (6), bahwa $L^2 = 2$, dan jelas bahwa L bukan bilangan rasional.

Bila pada bilangan rasional itu selanjutnya kita tambahkan limit dari semua batas barisan monoton naik, maka jadilah sistem bilangan yang kita sebut <u>bilangan real</u>.

Dari bahasan-bahasan di atas mengenai sistem bilangan kita ketahui

1. Himpunan semua bilangan bulat sebagai susunan dari bilangan-bilangan hitung atau bilangan natural.

2. Himpunan semua bilangan rasional $\frac{m}{n}$, sebagai susunan dari bilangan-bilangan bulat.

3. Himpunan semua bilangan real x sebagai susunan dari bilangan-bilangan rasional.

Penemuan bentuk berbagai sistem sebuah hierarki di dalam setiap sistem mengandung sistem-sistem yang lebih dahulu. Setiap sistem juga lebih kaya dari pada sistem yang sebelumnya dalam hal ini lebih banyak operasi dilakukan, tanpa berlaku di luar sistem itu.

Pernyataan dalam bentuk aljabar kita boleh katakan bahwa:

1. Di dalam sistem bilangan bulat kita dapat menyelesaikan semua persamaan dari bentuk:

$$x + a = 0 \qquad (7)$$

dengan a adalah bilangan bulat.

2. Dalam sistem dari semua bilangan rasional kita dapat menyelesaikan persamaan dari bentuk:

$$ax + b = 0 \qquad (8)$$

dengan a dan b adalah bilangan rasional dan $a \neq 0$

3. Dalam sistem bilangan real kita dapat menyelesaikan semua persamaan (7) dan (8) serta dalam penjumlahannya, dan semua persamaan kuadrat.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (9)$$

dengan $a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$

Pada pelajaran SMTA kita telah mengetahui formula abc, yaitu

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (10)$$

yang merupakan penyelesaian persamaan (9).

Bila $d = b^2 - 4ac$ itu negatif penyelesaian dalam (10) itu, tidak termasuk kedalam sistem yang telah kita bicarakan di atas. Hal seperti itu, persamaan kuadrat yang sangat sederhana

$$x^2 + 1 = 0 \qquad (11)$$

sangat tidak mungkin dapat kita selesaikan, jika hanya mempergunakan sistem bilangan yang bulat, bilangan rasional dan bilangan real.

Untuk menyelesaikan persamaan kuadrat semacam itu kita harus memakai sistem <u>bilangan kompleks</u>, yang disebut pula himpunan semua bilangan kompleks a + ib. Kita dapat menuliskannya tanpa simbul i dengan notasi penulisan seperti (a, b). Dalam hal ini kita sebut a "bagian real" dan b "bagian imaginer". Hati-hatilah dalam penulisan urutannya lebih dahulu daripada bagian yang lain. Urutan dalam pasangan itu tetap berlaku dalam operasi-operasinya seperti kesamaan, penjumlahan, perkalian dan sebagainya.

Agar lebih jelas perhatikan defenisi berikut:

Kesamaan:

$$a + ib = c + id \text{ bila dan hanya jika } a = c \text{ dan } b = d$$

Dua bilangan kompleks (a, b) dan (c,d) adalah sama, bila dan hanya jika a = c dan b = d.

Penjumlahan:

$$(a + i\,b) + (c + i\,d)$$

$$= (a + c) + i(b + d) \qquad (12)$$

Jumlah dua buah bilangan kompleks (a, b) dan (c, d) adalah bilangan kompleks (a + c, b + d).

Perbanyakan/Perkalian:

$$(a + ib)\ (c + id)$$

$$= (ac - bd) + i(ad + bc) \qquad (13)$$

Hasil kali dua bilangan kompleks (a, b) dan (c, d) adalah bilangan kompleks (ac - bd, ad + bc)

$$c(a + ib) = ac + i(bc) \qquad (14)$$

Hasil kali sebuah bilangan real c dengan bilangan kompleks (a, b) adalah bilangan kompleks (ac, bc).

Himpunan bilangan kompleks (a, b) dengan bilangan kedua adalah nol, mempunyai sifat bilangan real
Contoh dalam penjumlahan dan perkalian dari (a, 0) dengan (c, 0)

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$$

$$(a, 0)\ (c, 0) = (ac, 0)$$

yang semua bilangan pada bagian-bagian imajenernya sama dengan nol. Juga bila kita perbanyakan bilangan real (a, 0) dengan bilangan kompleks (c, d) kita peroleh:

$$(a, 0)\ (c, d) = (ac, ad)$$

$$= a(c, d)$$

Dalam hal khusus, bilangan kompleks (0, 0) memegang peran dalam nol dalam sistem bilangan kompleks, dan bilangan kompleks (1, 0) berperan dalam satuan.

Pasangan bilangan (0, 1) yang "bagian realnya" sama dengan nol dan "bagian imajenernya" sama dengan satu mempunyai bahwa kuadrat itu

$$(0, 1)\ (0, 1) = (-1, 0) \tag{15}$$

mempunyai "bagian real" sama dengan minus satu dan bagian imajinernya nol. Karena itu dalam sistem bilangan kompleks (a, b) itulah sebuah bilangan x = (0, 1) yang kuadratnya dapat dijumlahkan dengan satuannya = (1, 0) yang menghasilkan nol = (0, 0); itulah

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0) \tag{16}$$

Persamaan $x^2 + 1 = 0$ karena itu mempunyai jawaban x = (0, 1) yang ada pada sistem bilangan yang baru.

Kita seudah mengenal dengan notasi a + ib dan (a, b) untuk arti yang sama. Perhatikan sekarang

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, 0) + (0, b)\\ &= a(1, 0) + b(0, 1)\end{aligned}$$

dengaan (1, 0) menunjukkan satuan dan (0, 1) menunjukkan akar pangkat dua dari minus satu.

Jadi

$$(1, 0) = 1$$

$$(0, 1) = i = \sqrt{-1}$$

A. Bahan Latihan

1) Selesaikan hasil perkalian:
   a) (1, 3) (4, -2)
   b) (-2, -4)(-2, -1)
   c) (2, -1)(3, -2)
   d) (5, 2)(3, -3)

2) Carilah x dan y yang memenuhi:

   a) $(4 + 3i)^2 - 2(x - iy) = x + iy$

b) $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2 + \frac{1}{x + iy} = 1 + i$

c) $(3 - 2i)(x + iy) = 2(x - 2iy) + 2i - 1$

d) $(4, 2)(3, -1) = (x, y)$

e) $(2, 5)(6, 3) = (x, y)$

III DIAGRAM ARGAND

Dari bahasan di atas kita telah memahami bahwa $i^2 = -1$ atau

$$(0, 1)(0, 1) = (0, 1)^2 = (-1, 0)$$

ingat pula bahwa kita tidak dapat membagi dengan bilangan komplek $(0, 0) = 0 + i0$. Pembagian dengan bilangan kompleks pun hanya dapat diselesaikan jika pembagi $\neq 0$ sebagai contoh perhatikan hal berikut:

Carilah x dan y jika

$$\frac{c + id}{a + ib} = x + iy.$$

dan $a + ib \neq 0$

Penyelesaiannya:

$$\frac{c + id}{a + ib} = \frac{(c + id)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)}$$

$$= \frac{(ac + bd) + i(ad - bc)}{a^2 + b^2}$$

jadi $x = \frac{(ac + bd)}{a^2 + b^2}$,

$y = \frac{(ad - bc)}{a^2 + b^2}$, dengan

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

Bilangan a - ib yang digunakan untuk menetralkan i dengan diperbanyakan pada penyebut ini disebut kunjugate kompleks dari a + ib. Biasanya digunakan simbul z (baca "z bar") untuk konjugate kompleks z ; jadi

$$z = a + ib, \quad z = a - ib \tag{17}$$

Pada penyelesaian x dan y di atas, baik pembilang maupun penyebut diperbanyak dengan konjugate kompleks dari penyebut. Hal ini akan mengakibatkan penyebut menjadi bilangan real.

Jika kita lukiskan z = x + iy dalam geometri, ada dua hal yang dinyatakan olehnya.

1. sebagai titik P (x,y) ada bidang xy, atau
2. sebagai vektor $\overrightarrow{OP}$ dari titik pangkal ke titik P.

Pada kedua hal yang penyajian itu, sumbu x disebut "sumbu real" dan sumbu y disebut "sumbu imajener". Kedua penyajian itu dinamai DIAGRAM ARGAND (lihat gambar).

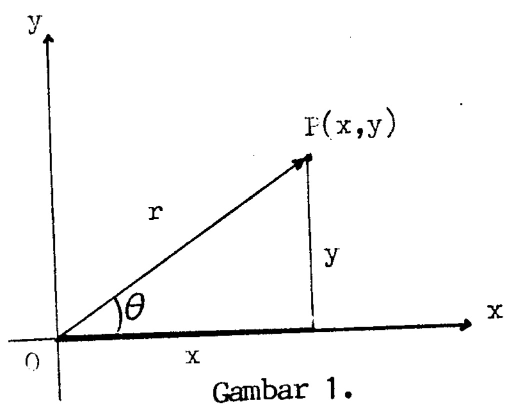
Dalam bentuk dari Kordinat kutub (polar coordinates), kita telah tahu bahwa x dan y dapat dinyatakan dalam jari-jari r dan perbandingan sudut, yaitu

$$x = r \text{ Cos } \theta, \quad y = r \text{ Sin } \theta,$$

dan

$$z = x + iy = r \text{ (Cos } \theta + i \text{ Sin } \theta).$$

Diagram Argand z = x + iy sebagai titik P(x,y) dan sebagai vektor $\overline{OP}$.



Gambar 1.

sebuah diagram Argand, menyajikan z = x + iy baik sebagai titik P (x,y) maupun sebuah vektor $\overrightarrow{OP}$.
Harga mutlak bilangan kompleks x + iy, adalah panjang r dari sebuah vektor $\overrightarrow{OP}$ dari titik pusat ke P (x,y).
Tanda harga mutlak kita pakai dua buah garis lurus tegak yang sejajar, jadi

$$z = x + iy = r \text{ (Cos } \theta + i \text{ Sin } \theta) \tag{18}$$

$$| z | = | x + iy | = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{19}$$

Dalam koordinat kutub dengan r dan θ, dengan $r \geqslant o$, kita peroleh

$$r = | x + iy | \tag{20}$$

Dengan sudut kutub θ biasanya kita sebut argumen z dan dituliskan
$\theta = \arg z$, dan $-\pi < \theta < \pi$
θ = sudut antara r dengan sumbu z positif.
Bila $\bar{z}$ adalah konjugate z, maka

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x + iy)\ (x - iy) \\ &= x^2 + y^2 \\ &= | z |^2 \end{aligned}$$

Jadi

$$z \cdot \bar{z} = | z |^2 \tag{21}$$

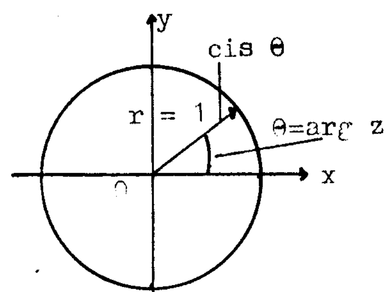
Untuk selanjutnya secara singkat Cos θ + i Sin θ kita tulis cis θ,

Jadi

$$\text{Cis } \theta = \text{Cos } \theta + i \text{ Sin } \theta \tag{22}$$

Beberapa contoh:

1. $\text{Cis } 0 = \text{Cos } 0 + i \text{ Sin } 0$
   $= 1 + i0$
   $= 1$

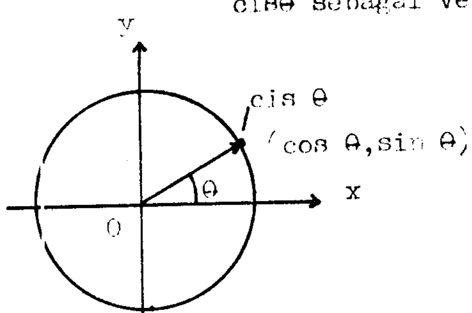


cisθ sebagai vektor

2. $\text{Cis } \dfrac{\pi}{4} = \text{Cos } \dfrac{\pi}{4} + i \text{ Sin } \dfrac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$$



cis θ sebagai titik

Gb 2.3

$$= \frac{1}{2}\,(\sqrt{2} + i\,\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\,\sqrt{2}\ \underline{\underline{(1 + i)}}$$

Dibawah ini akan diturunkan beberapa sifat Cis θ.

$$\text{Cis } \theta_1 \text{ Cis } \theta_2 = \text{Cis } (\theta_1 + \theta_2) \tag{23}$$

Bukti:

$$\text{Cis } \theta_1 . \text{ Cis } \theta_2 = (\text{Cis } \theta_1 + i \text{ Sin } \theta_2)(\text{Cos } \theta_2 + i \text{ Sin } \theta_2)$$

$$= (\text{Cos } \theta_1 \text{ Cos } \theta_2 - \text{Sin } \theta_1 \text{ Sin } \theta_2) +$$

$$i \text{ (Sin } \theta_1 \text{ Cos } \theta_2 - \text{Sin } \theta_2 \text{ Cos } \theta_1)$$

$$= \text{Cos } (\theta_1 + \theta_2) + i \text{ Sin } (\theta_1 + \theta_2)$$

$$= \text{Cis } (\theta_1 + \theta_2)$$

Terbukti $\text{Cis } \theta_1 \text{ Cis } \theta_2 = \text{Cis } (\theta_1 + \theta_2)$

$$(\text{Cis } \theta)^{-1} = \text{Cis } (-\theta) \tag{24}$$

Bukti: Dari (23) kita peroleh

$$\text{Cis } \theta \text{ Cis } (-\theta) = \text{Cis } (\theta - \theta) = 1$$

Jadi $\text{Cis } (-\theta) = \dfrac{1}{\text{Cis } \theta}$ atau

$$(\text{Cis } \theta)^{-1} = \text{Cis } (-\theta)$$

$$\frac{\text{Cis } \theta_1}{\text{Cis } \theta_2} = \text{Cis } (\theta_1 - \theta_2) \tag{25}$$

Bukti:

$$\frac{\text{Cis } \theta_1}{\text{Cis } \theta_2} = \text{Cis } \theta_1 \text{ } (\text{Cis } \theta_2)^{-1}$$

$$= \text{Cis } \theta_1 \text{ Cis } (-\theta_2)$$

berdasarkan (23) kita peroleh

$$= \text{Cis } (\theta_1 - \theta_2)$$

Terbukti $\dfrac{\text{Cis } \theta_1}{\text{Cis } \theta_2} = \text{Cis } (\theta_1 - \theta_2)$

A. PERBANYAKAN

Misal $z_1 = r_1 \text{ Cis } \theta_1$, $z_2 = r_2 \text{ Cis } \theta_2$ (26)
sehingga:

$$|\ z_1\ | = r_1,\ \arg\ z_1 = \theta_1 \qquad (27)$$

$$|\ z_2\ | = r_2,\ \arg\ z_2 = \theta_2$$

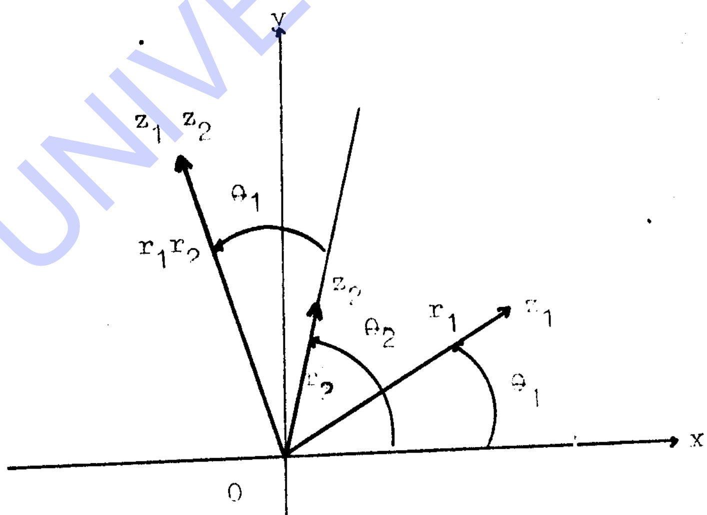
Kemudian

$$z_1 . z_2 = r_1 \text{ Cis } \theta_1 .\ r_2 \text{ Cis } \theta_2$$

$$= r_1 r_2 \text{ Cis } (\theta_1 + \theta_2)\text{, maka}$$

$$|\ z\ \ z_2\ | = r_1 . r_2 = |\ z_1\ | . |\ z_2\ |,$$

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg\ z_2 \qquad (28)$$



$z_1 z_2 = r_1 . r_2$

$\arg\ (z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$.

Gb 4

Jadi hasil perbanyakan dua buah bilangan kompleks, dinyatakan dengan sebuah vektor yang panjangnya merupakan hasil perbanyakan panjang masing-masing faktor dan argumennya adalah jumlah kedua argumen mereka. Sama pula jika argumen-argumennya negatif.

<u>Contoh</u>

Jika $z_1 = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{3} - i$

carilah $z_1 \; z_2$

Penyelesaian : $z_1 = \sqrt{2} \text{ Cis } \frac{\pi}{4} = 1 + i$

$$z_2 = 2 \text{ Cis } (-\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} - i$$

maka:

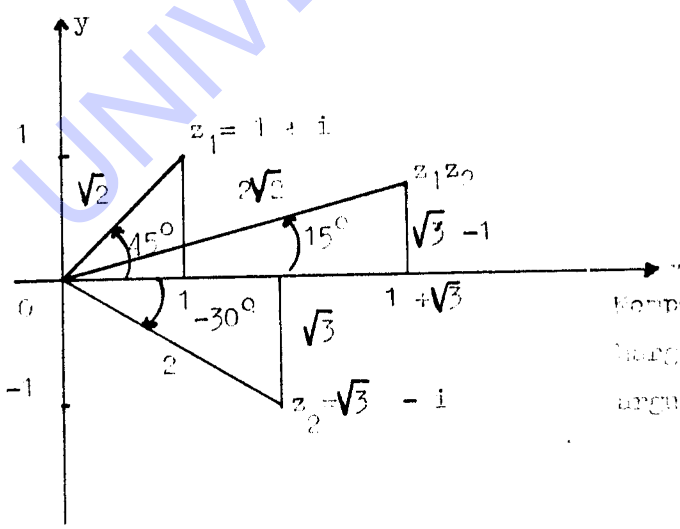
$$z_1 . z_2 = 2 \sqrt{2} \text{ Cis } (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})$$

$$= 2 \sqrt{2} \text{ Cis } (\frac{\pi}{12})$$

$$= 2 \sqrt{2} (\text{Cos } 15^o + i \text{ Sin } 15^o)$$

$$= 2,73 + 0,73 \; i$$

Jika kita buat dengan diagram Argand adalah seperti gambar 5



Memperbanyakkan hasilkali panjang vektor dengan jumlah argumennya .

Gb 5.

B. PEMBAGIAN

Misal $z_1 = r_1 \text{ Cis } \theta_1$, $z_2 = r_2 \text{ Cis } \theta_2$, $r_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \text{ cis } \theta_1}{r_2 \text{ cis } \theta_2} = \frac{1}{r^2} \text{ cis } (\theta_1 - \theta_2)$$

maka:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{1}{r_2} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$$

$$\arg \left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

Contoh:

Jika $z_1 = 2\sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{12}$, $z_2 = \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4}$

Carilah $z_1 : z_2$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= 2\sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{12} : \sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4} \\ &= 2 \text{ cis } (-\frac{\pi}{6}) \\ &= 2 \left\{ \cos (-\frac{\pi}{6}) + i \sin (-\frac{\pi}{6}) \right\} \\ &= 2 \left\{ + \frac{1}{2} \sqrt{3} - i \frac{1}{2} \right\} \\ &= \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

C. PEMANGKATAN

Bila n bilangan bulat positif

$z^n = z.\ z.\ z \ldots .$, sebanyak n buah z

Jika $z = r \text{ cis } \theta$ maka

maka $z^n = (r \text{ cis } \theta)^n$

$$= r^n \text{ cis } n\,\theta$$

$$(r \text{ cis } \theta)^n = r^n \text{ cis } n\,\theta \qquad (29)$$

Kita lihat bahwa $r = |z|$ naik dengan pangkat n. sedangkan sudut θ = arg z diperbanyak dengan n.

Bila r = 1 maka (29) menjadi

$$(\text{cis } \theta)^n = \text{Cis } n\,\theta \text{ a } \quad (\cos\theta + i \sin\theta) = \cos n\,\theta + i \sin n\,\theta \qquad (30)$$

Persamaan (30) ini disebut Teori De Moivre. Dengan pengembangan dari formula (30) kita dapat menyatakan cos θ dan sin n θ dalam cos θ dan sin θ.

Contoh:

Nyatakan cos 3 θ dan sin 3 θ dalam perbandingan sudut tunggal.

Penyelesaian:

Berdasarkan (30) kita peroleh $(\cos\theta + i \sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$. jika ruas kiri kita selesaikan, didapat:

$$\cos^3\theta + 3\cos^2\theta i \sin\theta + 3\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i \sin\theta)^3 =$$

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + 3\,i\cos^2\theta\sin\theta - i\sin^3\theta =$$

$$\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

Bagian yang nyata harus sama dengan cos 3 θ dan bagian yang imajiner harus sama dengan sin 3θ. Jadi

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \qquad (31)$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

D. PENGAKARAN.

Bila $z = r \cos\theta$ adalah sebuah bilangan kompleks bukan nol, dan n adalah bilangan bulat positif, maka ada n buah bilangan kompleks yang berlainan $w_o, w_1, w_2, \dots w_n$, yang masing-masing merupakan akar pangkat n dari z. Misal $w = \rho \text{ cis } \alpha$ adalah sebuah akar dari $z = r \text{ cis } \theta$, sehingga:

$$w^n = z \qquad \text{atau} \qquad \rho^n \text{ cis } n\alpha = r \text{ cis } \theta \tag{32}$$

$$\text{maka} \quad \rho = \sqrt[n]{r} \tag{33}$$

adalah bilangan real, positif akan pengkat n dari r.
Lebih jauh kita dapat mengatakan mengenai sudut $n\alpha$ dan θ, tidak hanya
$n\alpha = \theta$
tetapi:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \; ; \; k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \tag{34}$$

karena itu

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$$

Maka semua akar pangkat n dari $z = r \text{ Cis } \theta$ dinyatakan dengan

$$\sqrt[n]{r \text{ Cis } \theta} = \sqrt[n]{r} \text{ Cis } \left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) \tag{35}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Perlu diperhatikan bahwa dalam hal ini banyak sekali harga yang memenuhi bergantung pada nilai k. Tetapi kita akan mengatahui pula bahwa untuk $k = n + m$ akan mendapat nilai yang sama dengan $k = m$ untuk persamaan (35). Jadi kita hanya memerlukan n buah nilai k yang berbeda, untuk mememnuhi nilai akar pangkat n dari z. Untuk mudahnya kita ambil $k = 0,1,2 \ldots, n-1$.
Bila kita gambar, semua akar pangkat n dari $r \text{ Cis } \theta$ itu terletak pada lingkaran yang bertitik pusat pada pangkal titik salib sumbu dan jari-jarinya sama dengan akar real positif dari akar r pangkat n. Salah satu diantaranya mempunyai argumen $\alpha = \frac{\theta}{n}$.

Yang lainnya terletak pada keliling lingkaran itu dengan tambahan sudut sebesar $\frac{2\pi}{n}$

Sekedar gambaran misal akar pangkat 3 dari $z = r \text{ Cis } \theta$

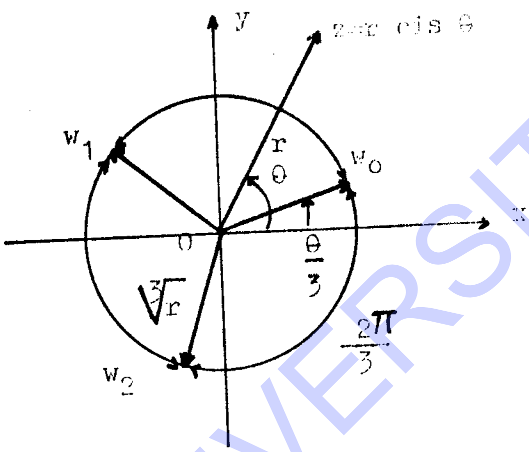
$$\sqrt[3]{r \text{ Cis } \theta} = \sqrt[3]{r} \text{ Cis } \left(\frac{\theta}{3} + k \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$W_0 = \sqrt[3]{r} \text{ Cis } \frac{\theta}{3}$$

$$W_1 = \sqrt[3]{r} \text{ Cis } \left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$W_2 = \sqrt[3]{r} \text{ Cis } \left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$$

Jika digambar seperti gambar 6.



Akar pangkat 3 dari $z = r \text{ cis } \theta$.

Gb. 6

<u>Contoh</u>

Carilah $\sqrt[4]{-16}$;

Penyelesaian:

$z = r \text{ Cis } \theta$

$z = -16, \; r = 16, \; \theta = \pi$

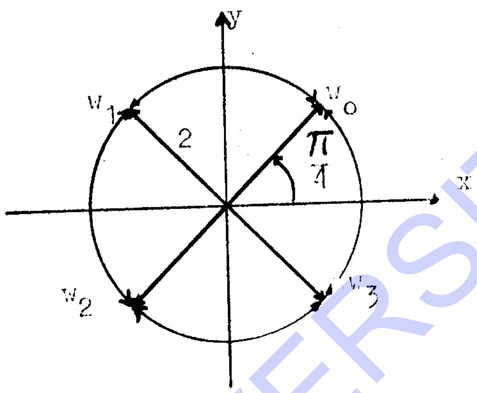
$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16 \text{ Cis } \pi} = 2 \text{ Cis } \left(\frac{\pi}{4}, k \frac{2\pi}{4}\right)$$

$$W_o = 2 \text{ Cis } \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\,(1+i)$$

$$W_1 = 2 \text{ Cis } \frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\,(-1+i)$$

$$W_2 = 2 \text{ Cis } \frac{5\pi}{4} = \sqrt{2}\,(-1-i)$$

$$W_3 = 3 \text{ Cis } \frac{7\pi}{4} = \sqrt{2}\,(1-i)$$



Gb. 7

akar pangkat 4 dari -16

Bahan Latihan

E. DENGAN DIAGRAM ARGAND

1) Tunjukkan bahan hukum penjumlahan bilangan kompleks sama dengan hukum jajaran genjang untuk penjumlahan vektor.

2) Bagaimana dapat bilangan komplek berikut didapat dari $z = x - iy$ secara geometri

a) $\bar{z}$, b) $(-\bar{z})$, c) $-z$ d) $\frac{1}{z}$

3) Tunjukkan bahwa konjugat dari hasil jumlah, perbanyakan atau bagi dari dua bilangan komplek z_1, dan z_2 sama dengan hasil jumlah, kali atau bagi konjugatnya.

4) Berdasarkan hasil no 3 tadi, tunjukkan bahwa $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ bila

$$f(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + \dots a_{n-1} z + a_n$$

adalah sebuah suku banyak dengan koefisien real a_o, a_1, ... a_n.

5) Tunjukkan bahwa $| \bar{z} | = | z |$

6) Bila $z = \bar{z}$ apa yang dapat Anda katakan tentang lokasi titik z pada bidang kompleks?

7) Misal R (z) , I (z) adalah bagian real dan imajener dari z. Tunjukkan bahan

a) $z + \bar{z} = 2\ R\ (z)$

b) $z - \bar{z} = 2i\ I\ (z)$

c) $|\ R\ (z)\ | \leqslant |\ z\ |$

d) $|\ z_1 + z_2\ |^2 = |\ z_1\ |^2 + |\ z_2\ |^2 + 2\ R\ (z_1\ z_2)$

e) $|\ z_1 + z_2\ | \leqslant |\ z_1\ | + |\ z_2\ |$

8) Gambarlah grafik $z = x + iy$ dengan:

a) $|\ z\ | = 2$ b) $|\ z\ | < 2$ c) $|\ z\ | > 2$

d) $|\ z - 1\ | = 2$ e) $|\ z + 1\ | = 1$

f) $|\ z + 1\ | = |\ z - 1\ |$ g) $|\ z + i\ | = |z - 1\ |$

9) Nyatakan setiap jawab soal berikut dalam bentuk r Cis θ dengan $r \geqslant 0$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ dan buat gambarnya

a) $(1 + \sqrt{-3})^2$ b) $\dfrac{1 + i}{1 - i}$

c) $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$ d) $(2 + 3i)(1 - 2i)$

10) Gunakan teori De Moivre untuk menyatakan Cos 4 θ dan Sin 4 θ sebagai suku banyak dalam Cos θ dan Sin θ.

11) Cari akar-akar dari:

a) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$

b) $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$

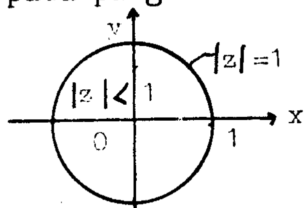
c) $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$

d) $x^4 + 1 = 0$

III <u>VARIABEL KOMPLEKS</u>

Dalam diagram Argand, sebuah himpunan S dari bilangan kompleks $z = x + iy$, dapat dinyatakan dengan titik-titik. Misalnya s adalah semua bilangan kompleks z utuk $|z| \leqslant 1$.

Korespondensi semua titik di dalam diagram Argand, yang kita sebut saja bidang z, adalah semua titik baik yang di dalam maupun yang pada lingkaran , dengan jari-jari satu dan berpusat pada pangkal salib sumbu 0. (lihat gambar 8).



gb.8
Bidang z

Dalam pembicaraan selanjutnya simbul z dipakai untuk menyatakan sebuah bilangan kompleks di dalam himpunan S. Dapat pula dikatakan bahwa z adalah sebuah variabel dengan domainnya S. Atau boleh kita pandang z sebagai titik yang bergerak terus menerus, sejak waktu t = 0 dari z_0 pada bidang z dengan waktu t. Kita juga dapat membayangkan bilangan kompleks z dengan titik (x, y) yang bergerak menurut persamaan $z = x + iy$ menjadi sebuah variabel. Waktu itu adalah variabel terikat, asalkan nilainya bergantung pada nilai t.

Jarak antara dua buah bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dengan $z_2 = x_2 + iy_2$ pada bidang kompleks adalah:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|$$

Jadi variabel kompleks $z = x + iy$ mempunyai limit $\alpha = a + ib$, bila jarak z dengan α mendekati nol, itu berarti $z \longrightarrow \alpha$ bila dan hanya jika $|z - \alpha| \longrightarrow 0$. Bila kita anggap z itu fungsi dari waktu, kita dapat mengatakan misalnya, bahwa

$$\lim_{t \longrightarrow 1} z = \alpha \qquad (36)$$

itu menunjukkan betul bahwa:

$$\lim_{t \to 1} | z - \alpha | = 0 \qquad (37)$$

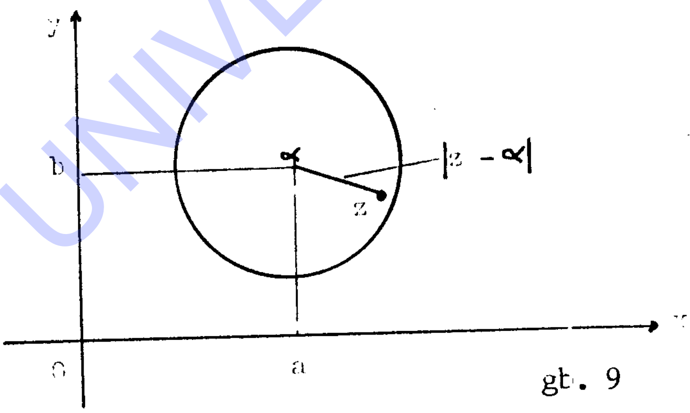
Bila persamaan (37) berlaku, maka kita dapat melukiskan sebuah lingkaran kecil dengan pusat α, dan titik $z = x + iy$ terletak didalamnya untuk semua nilai t mendekati satu. Itu berarti bahwa $| z - \alpha |$ adalah kecil bila $| t - 1 |$ juga kecil.
Dengan $z = x + iy$, dan $\alpha = a + ib$
maka

$$\begin{aligned} | z - \alpha | &= | (x + iy) - (a + ib) | \\ &= | (x - a) + i (y - b) | \\ &= \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \\ &\leqslant | x - a | + | y - b |, \end{aligned}$$

sedangkan $| x - a |$ dan $| y - b |$ kedua-duanya $\leqslant | z - a |$, jelas bahwa $z \to \alpha$ bila dan hanya jika (bhj)

$$x \to a \text{ dan } j \to b \qquad (38)$$

Kedua-duanya baik $| x - a |$ maupun $| y - b |$ kecil, bila $| z - \alpha |$ kecil dan sebaliknya yaitu bila $| x - a |$ dan $| y - b |$ kecil, maka $| z - \alpha |$ juga kecil



Jarak antara z dengan α pada bidang z sama dengan $|z - \alpha|$

gb. 9

A. FUNGSI

Kita menyebutkan bahwa w adalah sebuah fungsi dari z pada sebuah domain s dan kita tulis.

$$w = f(z) \quad , \quad z \text{ di dalam } s \tag{39}$$

bila kepada mesing-masing z di dalam himpunan s ada hubungan-hubungan sebuah bilangan kompleks $w = u + iv$. Misalnya s adalah himpunan bilangan kompleks dan

$$w = z^2 \tag{40}$$

untuk setiap titik $z = x + iy$ di dalam bidang z.
Persamaan (40) di atas menghasilkan sebuah bilangan kompleks.

$z = u + iv$

$$u + iv = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i\ (2\ xy) \tag{41}$$

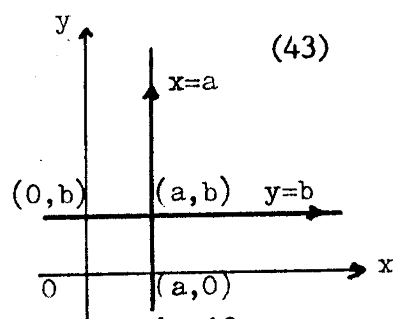
Sebuah cara untuk menggambarkan grafik fungsi ialah dengan "pemetaan". Sebagai contoh kita mempergunakan persamaan (41) untuk menentukan sebuah garis lurus, $x = a$ ke dalam bidang w.
Sekarang apa yang harus dilakukan w sebagai titik z yang dinyatakan dengan garis $x = a$ dari $y = -\infty$ ke $y = +\infty$? Untuk menyelesaikannya, kita bagi bagian yang real dan imagener persamaan (41) itu, misal jadi

$$u = x^2 - y^2 = a^2 - y^2$$

$$v = 2\ xy = 2\ ay \tag{42}$$

Persamaan (42) adalah persamaan parabola dalam parameter y, yaitu

$$v^2 = 4\ a^2\ (a^2 - u) \tag{43}$$



gb. 10
Bidang z

Bila a positif, $v = 2\ ay$ mempunyai tanda yang sama dengan y. Jadi jika titik z bergerak sepanjang garis $x = a$ dari $y = -\infty$ ke $y = +\infty$, titik w bergerak sepanjang parabola itu dengan arah seperti tertera pada gmbar 1. Demikian pula halnya dalam bidang w pada garis $y = b$, mempunyai persamaan parameter
$u = x^2 - b^2, \quad v = 2\ bx$
$-\infty < x < +\infty$
dengan parabola:

$$v^2 = 4b^2(b^2 + u) \tag{44}$$

Sekarang perhatikan persamaan (42) jika x = - a , maka $u = x^2 - y^2 = a^2 - y^2$ dan $v = 2\,xy = -\,2\,ay$ jadi

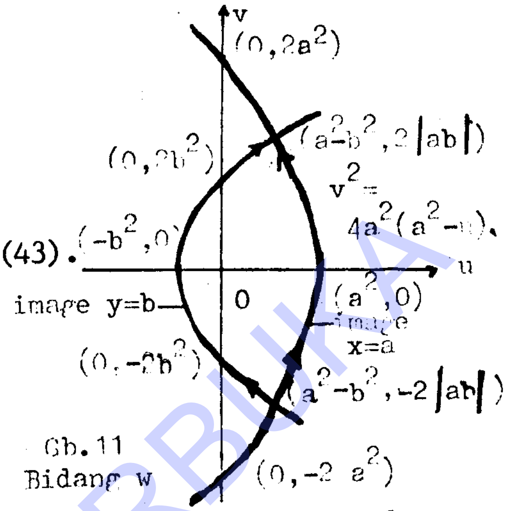
$$v^2 = (-\,2\,ay)^2 = 4\,a^2\,y^2$$

$$= 4\,a^2\,(a^2 - u)$$

ini menghasilkan yang sama dengan persamaan (43). Demikian pula halnya untuk y = -b

$$u = x^2 - y^2 = x^2 - (-b^2) = x^2 - b^2$$

$v = 2\,xy = -2\,bx$ dan



Gb. 11
Bidang w

$v^2 = 4\,b^2\,x^2 = 4\,b^2\,(b^2 + u)$ sama dengan persamaan (44). Hal itu jelas sekali asalkan titik z dan titik -z kedua-duanya pada titik yang sama yaitu $w = z^2 = (-z)^2$ pada bidang w.

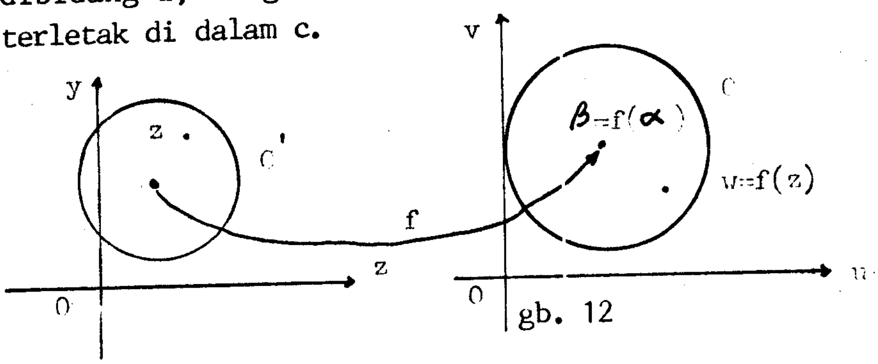
Pada gb 11 fungsi $w = z^2$ semuanya berubah, tetapi dua garis yang mendatar dan vertikal pada bidang z menjadi parabola-parabola. Pengecualian-pengecualian adalah kedua sumbu bidang z yang berubah menjadi (berkas) penggantinya.

B. KEKONTINUAN

Sebuah fungsi w = f(z) yang tertentu disekitar titik z = a disebut kontinu pada α bila

$$|\ f(z) - f(\alpha) \longrightarrow 0 \text{ seperti } |\ z - \alpha| \longrightarrow 0 \qquad (45)$$

Dari (45) itu, kita dapat mengetakan f(z) berdekatan dengan f( ) bila z dan α berdekatan. Dengan lain kata kita s ebut bahwa setiap lingkatan c yang berpusat pada $f(\alpha)$ pada bilangan ω bagaimanapun kecilnya lingkaran itu, ada sebuah lingkaran lain c' yang berpusat pada dibidang z, dengan sifat bahwa z selalu di dalam c^1, dan titik w terletak di dalam c.



gb. 12

Contoh

$f(z) = z^2$ adalah kontinu pada setiap titik z =

Kita tahu bahwa:

$$|f(z) - f(\alpha)| = |z^2 - \alpha^2|$$

$$= |(z+\alpha)(z-\alpha)|$$

$$= |z+\alpha|\ |z-\alpha|$$

Jika $z \to \alpha$, maka $\lim\limits_{z \to \alpha} (z+\alpha) = 2\alpha$

sehingga $\lim\limits_{z \to \alpha} |f(z) - f(\alpha)| = \lim\limits_{z \to \alpha} |(z+\alpha)| . |(z-\alpha)|$

$$= |2|\ \lim_{z \to \alpha} |z - \alpha| = 0$$

Sudah jelas kiranya semua yang tertera pada (45) dengan contoh tadi selanjutnya coba kerjakan soal berikut.

C. BAHAN LATIHAN

1. Dalam hubungan dengan fungsi $w = z^2$ yang telah dibicarakan di atas, gambar imaginasinya dalam bidang w dari gambar-gambar pada bidang z berikut (gunakan koordinat polar)
   a) $|z| = 1$ $\quad 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$
   b) $|z| = 2$ $\quad \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$
   c) $\arg z = \frac{\pi}{4}$
   d) $|z| < 1, -\pi < \arg \leqslant 0$
   e) sumbu x
   f) sumbu y.

2. Tunjukkan bahwa:
   a) $f(z) = z^3$ kontinu pada $z = \alpha$ untuk sebarang α
   b) $f(z) = \frac{1}{z}$ kontinu pada $z = \alpha$ bila $\alpha \neq 0$

IV TURUNAN (DERIVATIF)

Turunan dari fungsi w = f (z) didapat dengn jalan yang sama seperti turunan fungsi bernilai real dari variabel real x. Misal, turunan pada $z = \alpha$ adalah

$$f^1(z) = \lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}, \qquad (46)$$

dengan limit itu ada.
Dengan pengertian bahwa limit (46) itu ada, tentu itu berarti bahwa ada sesuatu bilangan kompleks, yang kita sebut $f^1(\alpha)$ sedemikian sehingga

$$\left| f^1(\alpha) - \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \right| \to 0 \qquad (47)$$

asalkan $|z - \alpha| \to 0$

Asalkan z mendekati α dari arah manapun ekstensi dari sebuah limit sedikit kuat pembatasan pada fungsi w = f(z)

Contoh:

Fungsi $w = \bar{z} = f(z)$ (48)
dengan $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$

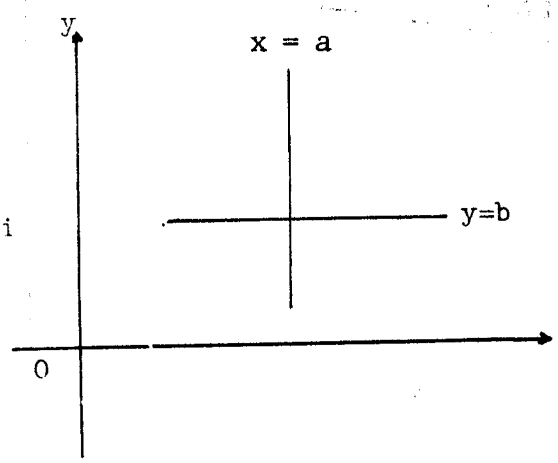
tidak mempunyai derivatif pada setiap titik. Bila kita ambil x = a + ib, maka:

$$\frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \frac{\bar{z} - \bar{\alpha}}{z - \alpha} = \frac{(x - a) - i(y - b)}{(x - a) + i(y - b)} \qquad (49)$$

Sekarang, dari berbagai jalan yang berbeda agar supaya z mendekati , kita harus perhatikan kedua hal berikut:

1. sepanjang garis y = b dan
2. sepanjang garis x = a

h.13 Fungsi $w = z$ tidak didefe-
rensialkan pada sebarang titik α
sebab hasil bagi dari $(\bar{z} - \bar{\alpha})/(z - \alpha)$
mempunyai limit yang berbeda seperti
z mendekati α pada garis $x = a$ dan
garis $y = b$.



gb. 13

Dalam hal yang pertama yaitu $y = b$ dan misal x mendekati a persamaan (49) menjadi.

$$y = b: \quad \frac{f_{(z)} - f(\alpha)}{z - \alpha} = \frac{x - a}{x - a} = +1$$

sehingga

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y = b}} \frac{f_{(z)} \quad f(\alpha)}{z - \alpha} = +1 \qquad (50)$$

Dalam hal yang kedua kita ambil $x = a$ dan misal y mendekati b persamaan (49) menjadi.

$$x = a: \quad \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = \frac{-i\,(y - b)}{i\,(y - b)} = -1$$

maka:

$$\lim_{\substack{x = a \\ y \to b}} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = -1 \qquad (51)$$

Asalkan kedua jalan yang berbeda itu dimana z dapat mendekati sedekat mungkin terhadap kedua nilai linit yang berbeda dari hasil bagi deferensial $(f(z) - f(\alpha)) / (z - \alpha)$, maka tidak ada sebuah bilangan kompleks yang kita sebut $f^1(\alpha)$ pada persamaan (46) ataupun persamaan (47). Hal itu menunjukkan bahwa fungsi w = z tidak mempunyai sebuah turunan.

Dalam bentuk notasi Δ kita sebut $z - \alpha = \Delta z$, $f(z) - f(\alpha) = \Delta w$ dan katakanlah bahwa $w = f(z)$ mempunyai sebuah turunan.

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \tag{52}$$

Limitnya ada dan tidak bergantung pada apa yang terjadi dimana $z \to 0$. Formula-formula untuk deferensial penjumlahan, perkalian, hasil bagi dan pangkat dari bilangan kompleks sama seperti pada variabel real. Dengan lain kata, bila C adalah sebarang constanta komplek, n sebuah bilangan bulat positif dan bila f(z) dan g (z) adalah fungsi-fungsi yang mempunyai turunan pada $z = \alpha$, kemudian pada $z = \alpha$ itu:

1. $\dfrac{dc}{dz} = 0$

2. $\dfrac{dc\ (z)}{dz} = c\,\dfrac{d\ (z)}{dz}$;

3. $\dfrac{d\,[\,f(z) + g\,(z)\,]}{dz} = \dfrac{d\ f(z)}{dz} + \dfrac{dg\ (z)}{dz}$,

4. $\dfrac{d}{dz}[\ f(z)\ g\ (z)\ ] = f(z)\,\dfrac{dg\ (z)}{dz} + \dfrac{g\ (z)\ d\ f(z)}{dz}$

5. $\dfrac{d}{dz}\,\dfrac{f(z)}{g\ (z)} = \dfrac{g\ (z)\,\dfrac{d\ f(z)}{dz} + \dfrac{f(z)\ cg\ (z)}{dz}}{[\ g\ (z)\ ]^2}$

$g\ (z) \neq 0$,

6. $\dfrac{d}{dz} [\ f(z)\ ]^n = n\ [\ f(z)\ ]^{n-1}\ \dfrac{d\ f(z)}{dz}$

7. $\dfrac{d\ (z^n)}{dz} = n\ z^{n-1}$

Formula di atas dapat pula didapat dengan mencari limit dalam notasi Δ , bagi limit dari penjumlahan, perkalian, hasil bagi dari dua buah bilangan kompleks adalah jumlah hasil kali atau hasil bagi dari limit mereka.

Contoh:

Tunjukkan bahwa $\dfrac{d\ (z^3)}{dz} = 3\ z^2$

Penyelesaian:

Misal $w = z^3$, maka

$$w + \Delta\ w = (z + \ \ z)^3$$

$$= z^3 + 3\ z^3 \Delta\ z + 3\ z\ (\Delta\ z)^2 + (\Delta\ z)^3$$

$$w = 3\ z^2 \Delta\ z + 3\ z\ (\Delta\ z)^2 + (\Delta\ z)^3$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = 3\ z^2 + 3\ z\ \ \ z + (\Delta\ z)^2$$

dan $\left| \dfrac{\Delta w}{\Delta z} - 3\ z^2 \right| = |\ 3\ z + \Delta z\ |\ |\Delta\ z\ | \longrightarrow 0$

asalkan $\Delta z \longrightarrow 0$

Karena itu $\lim\limits_{\Delta z \longrightarrow 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z} = 3\ z^2$

maka $\frac{dw}{dz} = \frac{d\ (z^3)}{dz} = 3\ z^2$

A. Soal Latihan

Cari turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut pada titik z_o yang diberikan pula.

1. $\frac{z+1}{z-1}$, $z_o = 1 + i$

2. $z^3 + 3\ z^2 + 3\ z + 2$, $z_o = -1 + 2\ i$

3. $\sqrt{z^2 + 1}$, $z_o = (1 + i)\ /\ \sqrt{2}$.

V PERSAMAAN CAUCHY - RIEMANN

Bila fungsi kompleks $w = u + iv$ mempunyai turunan (derivatif) pada titik $\alpha = a + ib$, kemudian dengan membuat $z \longrightarrow \alpha$, segera sepanjang garis $y = b$ (misalnya $\Delta y = 0$ menjadikan $\Delta x \longrightarrow 0$) dan kemudian sepanjang garis $x = a$ (misal kita ambil $\Delta x = 0$, menjadikan $\Delta y \longrightarrow 0$) dengan mudahnya kita mempelajari

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \text{ dan } \frac{\delta v}{\delta x} = -\frac{\delta u}{\delta y} \qquad (53)$$

harus sudah tentu pada titik (a.b).

Dengan pengertian bahwa $\frac{dw}{dz}$ ada pada $z = \alpha$, kita mempunyai

$$f^1\ (\alpha) = \lim_{\substack{\Delta x \longrightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta u + i\ \Delta v}{\Delta x + i\ \Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\ \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$= \left(\frac{\delta u}{\delta x} + i\frac{\delta v}{\delta x}\right)_{z = \alpha} \tag{54}$$

dan juga:

$$f^1(\alpha) = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left(\frac{\Delta u}{i\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{i}\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y}\right)_{z = \alpha}$$

$$= \left(-\,i\frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta y}\right)_{z = \alpha} \tag{55}$$

Sekarang kita hanya menyesuaikan bagian-bagian real dan imagenar dari kedua pernyataan $f^1(\alpha)$ pada (54) dan (55) agar supaya memenuhi persamaan (53).

Hubungan-hubungan itu, yang bertautan empat bagian turunan partial dari u dan v terhadap x dan y, dikenal sebagai persamaan diferensial Cauchy-Riemann.

Kita beru saja mendapatkan bahwa persamaan-persamaan itu mesti ada pada setiap titik dimana w = f(z) mempunyai sebuah turunan. Jadi tidak dapat secara umum, khusus fungsi-fungsi u = u (x,y) dan v = v (x,y) yang tidak bergantungan (bebas) dan fungsi gabungan w = u + iv dideferensialkan terhadap z = x + iy. Tetapi bila kita mengambil fungsi-fungsi dan dapat dilakukan dengan persamaan Cauchy-Riemann, dan dalam perjumlahan kontinu derivatif partial U_x, U_y, V_x, V_y, maka itu adalah benar (bukti tidak diberikan) bahwa fungsi gabungan w = u + iv dapat dideferensialkan terhadap z. Ini dapat kita katakan bahwa bila derivatif itu dihitung menurut dua arah x = a dan y = b adalah sama dan bila derivatif partial U_x, U_y, V_x, U_y adalah kontinu, maka kita mendapatkan juga jawaban yang sama untuk $f^1(\alpha)$ dari semua arah.

Bila sebuah fungsi w = f(z) mempunyai derivatif pada setiap titik pada daerah G dalam bidang z, maka fungsi itu "dianalisa" dalam G. Bila sebuah fungsi tidak mempunyai derivatif pada titik α, tetapi pada titik-titik lainnya dalam daerah G mempunyai derivatif, kita tetap sebut bahwa itu adalah analitik didalam G, kecuali pada α, dan α adalah titik singular pada fungsi itu. Sebagai contoh, sebuah fungsi rasional $f(z) / g(z)$, dimana $f(z)$ dan $g(z)$ adalah suku banyak (poli nomial) adalah analitik dimanapun kecuali pada titik yang menghasilkan penyebutnya nol. Untuk semua titik dimana $g(z) \neq 0$, fungsi itu mempunyai sebuah derivatif:

$$\frac{g(z)\ f^1(z) - f(z)\ g^1(z)}{[\ g(z)\ ]^2}$$

Agar lebih jelas perhatikanlah contoh berikut.

Contoh

Tunjukkan bahwa bagian-bagian real dan imajener dari fungsi $w = \frac{1}{z}$ dapat disajikan dalam persamaan Cauchy-Riemann pada semua titik dengan $z \neq 0$.

Penyelesaian

Misal $w = u + iv$

$$= \frac{1}{x + iy}$$

$$= \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

sehingga

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v = \frac{-y}{x^2 + y^2};$$

$$x^2 + y^2 \neq 0$$

Dengan menggunakan derivatif parsial, kita peroleh:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\delta v}{\delta y},$$

$$\frac{\delta v}{\delta x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\delta u}{\delta y}.$$

sehingga persamaan Cauchy Riemann tersaji pada semua titik dimana

$$x^2 + y^2 \neq 0 \text{ atau}$$

$$z \neq 0$$

A. Bahan Latihan

1. Cari bagian real dan imagener dari fungsi $W = f(z)$, $W = u + iv$, $z = x + iy$, dan tunjukkan bahwa fungsi itu tersaji dalam persamaan Cauchy - Riemann:

   a. z^2 b. z^3 c. z^4 d. $\frac{1}{z}2$, $z \neq 0$

2. Bila derivatif parsial tingkat satu dan dua dari bagian real dan imagener $u = u\ (x,y)$, $v = v\ (x,y)$ dari sebuah fungsi analitik $W = f(z)$ adalah kontinu, tunjukkan bahwa

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} = 0$$

3. Nyatakan bahwa persamaan pada no: 2 di atas adalah tersaji dengan bagian real dan imajener dari fungsi-fungsi:

   a) z b) z^2 c) z^3

VI DERET KOMPLEKS

Fungsi yang paling sederhana dari variabel kompleks $z = x + iy$ adalah suku banyak dan fungsi rasional (suku banyak) dalam z. Hal ini telah dibahas secara singkat sebelum uraian ini, pada uraian yang lalu.

Sekarang bagaimanakah, mungkin atau tidak mungkinkah kita membuat ketentuan (definisi) yang dapat digunakan pada fungsi elementer lain, seperti Sin z, Cos z, e^z, Cosh z dan sebagainya. Memang agak sukar untuk membayangkan Sin (2 + 3i), sebagai contoh bila kita mencoba memikirkan 2 + 3i itu sebagai sebuah sudut. Dalam hal ini kita mendapat kesukaran memikirkan tentang arti yang lebih sederhana dari pernyataan Sin 2. Sebab kita tidak mengetahui dua itu apa? Dalam hal terakhir adalah "2 radian" jawabnya. Besarnya Sin 2 dapat dicari dalam tabel trigonometri. Penyusunan tabel trigonometri itu berdasarkan deret

$$\text{Sin } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (56)$$

Mempergunakan deret untuk menghitung semacam Sin 2, kita tidak usah memikirkan tentang radial sama sekali, tetapi ambil x = 2 sebagai bilangan asli.
Dalam penyusunan tabel digunakan juga identitas trigonometri untuk Sin (x + y), Cos (x + y) dan seterusnya, tetapi deret pada persamaan (56) itu merupakan bahan dasar. Sekarang dapatkah secara langsung kita menentukan Sin z = Sin (x + y) pada deret (56) dengan menggantikan x oleh z ?
Tentu saja dapat dilakukan bila kita kehendaki dan bila deret itu konvergen jadi

$$\text{Sin } z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \qquad (57)$$

Bila y nol maka z = x + iy menjadi z = x, jadi deret (57) sama dengn (56). Jadi hal itu secara konsisten akan terus digunakan deret itu untuk menetapkan domin Sin z dari yang nayata (real) ke dalam bidang kompleks.

<u>Konvergen</u>

Sebuah deret pangkat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_o + a_1 Z + a_2 Z^2 + \ldots \qquad (58)$$

disebut Convergen pada sebuah titik Z, bila barisan dari jumlah parsial

$$S_o = a_o$$

$$S_1 = a_o + a_1 Z$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_o + a_1 Z + \dots + a_n Z^n \qquad (59)$$

mempunyai sebuah limit bila n mendekati tidak berhingga. Bila S_n kita bagi dalam bagian yang real dan imagener,

$$S_n = U_n (x,y) + i V_n (x,y) \qquad (60)$$

kemudian

$$S_n \longrightarrow u + iv \quad \text{bila dan hanya jika} \quad U_n \longrightarrow u \text{ dan } V_n \longrightarrow v \qquad (61)$$

Hal itu sama halnya dengan

$$| S_n - (U + iv) | = | (U_n - u) + i (V_n - v) |$$
$$= \sqrt{(U_n - u)^2 + (V_n - v)^2}$$

mendekati nol bila dan hanya jika $U_n - u \longrightarrow 0$ dan $V_n - v \longrightarrow 0$.

Deret (58) itu kita sebut Convergen mutlak bila dan hanya jika hubungan deret nilai mutlak.

$$\sum_{n=0}^{\infty} | a_n z^n | = | a_o | + | a_1 Z | + |a_2 Z^2 | + \dots \qquad (62)$$

adalah Convergen. Kita telah tahu bahwa deret bilangan real positif adalah Convergen, maka (62) itu Convergen, ini menyatakan juga bahwa (58) Convergen.

Teori:

Bila sebuah deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_n$ Convergen mutlak.

maka a juga Convergen.

Bukti:

Kita bagi dalam bagian real dan imagener, misal

$$a_k Z^k = C_k + id_k, \; k = 0,1,2, \dots \tag{63}$$

dimana C_k dan d_k adalah real. Kemudian bila deret (62) itu Convergen, kita pakai sifat bahwa

$$| C_k | \leqslant \sqrt{C_k^2 + d_k^2} = | a_k Z^k |,$$

$$| d_k | \leqslant \sqrt{C_k^2 + d_k^2} = | a_k Z^k |,$$

dan persamakan percobaan itu bagi deret-deret real yang tidak negatif, untuk menunjukkan bahwa

$$\sum | C_k | \text{ dan } \sum | d_k |$$

kedua-duanya Convergen. Tetapi dari sini kita menarik kesimpulan bahwa deret

$$\sum C_k \text{ dan } \sum d_k$$

(tanpa tanda hanya mutlak), kedua-duanya Convergen.
Jadi

$$\sum (C_k + id_k) = \sum C_k + i \sum d_k$$

juga Convergen (terbukti)

Contoh:

Deret $\sin Z = Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} - \frac{Z^7}{7!} + \dots$

Convergen untuk semua bilangan kompleks Z, $| Z | < \infty$

Bukti

Coba $\sin Z = Z - \frac{Z^3}{3!} + \dots$

Untuk Convergen mutlak dengan mengujikan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1} Z^{2k-1}}{(2k-1)!} \right| \qquad (64)$$

Kita pergunakan perbandingan percobaan dengan:

$$U_n = \left| \frac{(-1)^{n-1} Z^{2n-1}}{(2n-1)!} \right|$$

hitung $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{|Z^2|}{2n\,(2n+1)}$

Untuk sebarang Z tertentu demikian hingga $|Z| < \infty$, kemudian kita dapatkan

$$\lim_{n \to \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{|Z^2|}{2n\,(2n+1)} = 0$$

Asalkan limit ini lebih kecil dari pada satuannya, deret (64) Convergen itulah deret $\operatorname{Sin} Z = Z - \dfrac{Z^3}{3!} + \dfrac{Z^5}{5!} - \dfrac{Z^7}{7!} + \dots$

Convergen dengan mutlaknya.
Maka dengan teori kita, itu juga Convergen tanpa tanda nilai mutlak.

A. <u>Bahan Latihan</u>

Pada soal 1-5 tuliskan 4 suku pertama dari deret itu, dan cari wilayah pada bidang komplek, dimana setiap deret Convergen mutlak.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} Z^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \quad nZ^{n-1}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{(Z-1)^n}{n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(Z+i)^n}{n}$

5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(Z+1)^n}{2^n}$

6. Tunjukkan, bahwa $\sum z^k / k!$ Convergen mutlak untuk semua $| Z | < \infty$

7. Tunjukkan, bahwa $\sum (-1)^k z^{2k} / (2k)!$

Convergen mutlak untuk semua $| Z | < \infty$

8. Tunjukkan, bahwa deret $\sum (-1)^{k-1} z^k / k$

Convergen mutlak untuk $| Z | < 1$.

VII <u>FUNGSI-FUNGSI</u> <u>ELEMENTER</u>

Kita dapat menentukan fungsi-fungsi lain dari variabel kompleks, seperti yang kita lakukan pada Sin Z, dengan menggunakan formula-formula secara luas, sudah mengembangkan nilai fungsi real. Secara formal, kita baru mensubsitusikanZ untuk x, untuk formula seperti:

$$e^Z = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^k}{k!}, \qquad (65)$$

$$\text{Sin } Z = Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} - \frac{Z^7}{7!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} Z^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad (66)$$

$$\text{Cos } Z = 1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - \frac{Z^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k Z^{2k}}{(2k)!} \qquad (67)$$

$$\tan^{-1} Z = Z - \frac{Z^3}{3} + \frac{Z^5}{5} - \frac{Z^7}{7} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, Z^{2k-1}}{2k-1}, \tag{68}$$

$$\ln (1+Z) = Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \frac{Z^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{Z^k}{k} \tag{69}$$

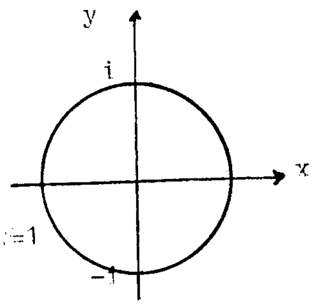
Dengan mudah dapat ditunjukkan, bahwa dengan perbandingan percobaan (ratio test) ketiga deret (65), (66) dan (67) itu konvergen mutlak untuk $| Z | < \infty$. Deret (68) dan (69) convergen mutlak bila Z berada di dalam lingkaran $| Z | < 1$ dan convergen bila $| Z | > 1$.
Fungsi invers tangen adalah multiple-valued, dan deret pada (68) memberikan nilai prinsip (pokok) dari $\tan^{-1} Z$. Kita akan tunjukkan bahwa logaritma dari sebuah bilangan komplek, adalah multiple-valued juga, dan deret (69) memberikan nilai pokok dari ln (1+Z) bila $| Z | < 1$
Itu adalah sebuah teori pokok di dalam teori dari fungsi variabel komplek bahwa deret pangkat $\sum a_k Z^k$ memenuhi salah satu dari:

a) convergen, hanya pada Z = 0 atau
b) convergen, di dalam lingkaran $| Z | < R$ atau
c) convergen untuk semua Z, $| Z | < \infty$

Hal yang kedua b) di atas terjadi bila fungsi tersaji dalam deret pangkat itu analitik dimanapun di dalam lingkaran $| Z | < R$, tetapi mempunyai sebuah keistimewaan pada lingkaran $| Z | = R$.
Dalam kasus ini, teori mengatakan kepada kita, bahwa lingkaran paling besar didalamlah yang menjadikan deret itu convergen mempunyai jari-jari R yang sama dengan jarak dari Z = 0 ketitik istimewa terdekat dan fungsi itu.
Sebagai contoh:

$$\frac{1}{1+Z^2} = 1 - Z^2 + Z^4 - Z^6 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Z^{2k} \tag{70}$$

Convergen di dalam lingkaran yang berjari-jari R = 1, sedangkan keistimewaan fungsi itu terjadi pada $Z = \pm i$, yang berada pada berjarak R = 1 dari titik pangkal lingkaran $| z | = 1$ kita sebut "lingkaran dari ke-convergenan" dan kita artikan bahwa deret itu convergen untuk semua Z di dalam lingkaran itu dan divergen untuk setiap Z yang di luar



lingkaran tadi (lihat gambar lingkaran ke Convergenan). Tingkah laku pada lingkaran ke convergenan itu adalah masalah yang sukar dan tidak kita bicarakan.

gb. 14

Sifat-sifat utama dari fungsi-fungsi elementer terdiri atas domain variabel real x terhadap variabel kompleks Z dengan jalan memanipulasi secara aljabar dalam deret. Sebagai contoh kita dapat buktikan teori berikut:

Dalil: $e^{Z_1} . e^{Z_2} = e^{Z_1+Z_2}$

Bukti: Kita perbanyakan deret e^{Z_1} dengan deret e^{Z_2} dan kumpulkan bentuk-bentuknya seperti derajat. Dengan derajat dari bentuk

$$Z_1^p \; Z_2^q$$

dengan mudah kita artikan penjumlahan pangkat p + q. Kita curahkan perhatian kita pada semua bentuk hasil kalinya adalah derajat tertentu misalnya n. Kemudian semua pangkat yang lebih kecil dari n kita abaikan saja

$$Z_1^{n+1}, \quad Z_1^{n+2}, \ldots \quad \text{dan} \quad Z_2^{n+1}, \quad Z_2^{n+2}, \ldots$$

Sekarang kita kehendaki semua susunan dari bentuk $Z_1^k \; Z_2^{n-k}$ dengan $k = 0,1,2, \ldots, n$.

Bila

$$e^{Z_1} = 1 + Z_1 + \frac{Z_1^2}{2!} + \frac{Z_1^3}{3!} + \ldots + \frac{Z_1^n}{n!} + \ldots,$$

kita perbanyakan dengan

$$e^{Z2} = 1 + Z_2 + \frac{Z_2^2}{2!} + \frac{Z_2^3}{3!} + \ldots + \frac{Z_2^n}{n!} + \ldots,$$

hasilnya dalam bentuk pangkat n:

$$\frac{Z_1^n}{n!}\,1 + \frac{Z_1^{n-1}}{(n-1)!}\,Z_2 + \frac{Z_1^{n-2}}{(n-2)!}\,\frac{Z_2^2}{2!} + \ldots,$$

$$+ \frac{Z_1^{n-k}}{(n-k)!}\,\frac{Z_2^k}{k!} + \ldots + 1.\,\frac{Z_2^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{Z_1^{n-k}\,Z_2^k}{(n-k)!\,k!} \qquad (71)$$

Cara lain bentuk pangkat n dalam deret :

$$e^{Z_1} + {}^{Z_2} = 1 + (Z_1 + Z_2) + \frac{(Z_1 + Z_2)}{2!} + \ldots + \frac{(Z_1 + Z_2)n}{n!} + \ldots$$

yang dalam binomial :

$$\frac{(Z_1 + Z_2)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\, Z_1^n + n\,Z_1^{n-1}\,Z_2 + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,Z_1^{n-2}\,Z_2^2 + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!}\,Z_1^{n-k}\,Z_2^k + \ldots + Z_2^n\,\right]$$

Dengan memperhatikan:

$$\frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{k!}\,\frac{(n-k)\,!}{(n-k)\,!} = \frac{r\,!}{k!\,\,(r-k)\,!}$$

kita dapat menuliskan penjumlahan itu dalam bentuk:

$$\frac{(Z_1 + Z_2)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,\,(n-k)\,!}\,Z_1^{n-k}\,Z_2^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{Z_1^{n-k}\,Z_2^k}{(n-k)\,!\,\,k\,!} \qquad (72)$$

Dari persamaan (71) dan (72) itu, kita memperoleh hasil; yang sama dan bentuk pangkat n, dari hasil perbanykan deret e^{Z_2} dan e^{Z_2} ialah deret $e^{Z_1+Z_2}$.

Penemuan di atas itu berlaku untuk semua bilangan bulat positip n. Untuk n=0, bentuk pangkat nol itu adalah:

$$Z_1^o\, Z_2^o = 1 \text{ dan } (Z_1+Z_2)^o = 1,$$

memenuhi dan sama juga. Jadi bentuk dari pangkat n, (n = 0,1,2,3, ...) adalah sama, dalam hasil kali deret e^{Z1} dengan e^{Z2} menjadi deret e^{Z1+Z2}. Ini membuktikan bahwa (deret untuk e^{Z1}). (deret untuk e^{Z2}) = (deret untuk e^{Z1+Z2}).

Perlu diperhatikan bahwa jumlah dari deret-deret, diperoleh bila dua buah deret dikalikan satu sama lainnya dan bergantung pada bagaimana bentuk-bentuk hasil kali itu disusun atau dikelompokkan. Cara menyusun bentuk-bentuk hasil kali deret $e^{Z1}\ e^{Z2}$ yang telah dibuktikan teori tadi misalnya, berbeda dengan bentuk:

$$1.\quad (1 + Z_2 + \frac{Z_2^2}{2!} + \ldots) + Z_1\ (1 + Z_2 + \frac{Z_2^2}{2!} + \ldots) +$$

$$\frac{Z_1^n}{n!}\ (1 + Z_2 + \frac{Z_2^2}{2!} + \ldots) + \ldots$$

dimana kita telah menjumlahkan semua bentuk yang tidak mengandung Z_1, kemudian hanya yang mengandung pangkat satu dari Z_1, kemudian pangkat dua dari Z1 dan seterusnya. Hal itu tentu tidak perlu dilakukan, bila kita mencoba menunjukkan, bahwa hasilnya sama dengan

$$1 + (Z_1 + Z_2) + \frac{(Z_1 + Z_2)^2}{2!} + \frac{(Z_1 + Z_2)^3}{3!} + \ldots$$

malahan dapat memperoleh jawaban yang berbeda. Tetapi hal itu boleh banyak ditampilkan kursus advance dalam analisa-analisa, bahwa bila hasil kali dua buah deret itu convergen mutlak, maka ia dapat disusun dalam bentuk sebarang cara apa yang kita kehendaki, asalakan kita diperkenankan mengambil bentuk dalam perhitungannya. Deret e^Z adalah convergen mutlak untuk semua mulai Z. Maka deret-deret e^{Z1} dan e^{Z2}, sesuai dengan teori di atas, dan dibolehkan disusun berdasarkan derajat, seperti telah kita lakukan tadi.

Dengan operasi yang sama pada deret pangkat, kita dapat menunjukkan bahwa:

$$\operatorname{Sin}(Z_1 + Z_2) = \operatorname{Sin} Z_1 \operatorname{Cos} Z_2 + \operatorname{Sin} Z_2 \operatorname{Cos} Z_1$$

$$\operatorname{Cos}(Z_1 + Z_2) = \operatorname{Cos} Z_1 \operatorname{Cos} Z_2 - \operatorname{Sin} Z_1 \operatorname{Sin} Z_2$$

$$\operatorname{Cos}^2 Z + \operatorname{Sin}^2 Z = 1.$$

Salah satu hasil yang terkenal dari fungsi kompleks elementer adalah formula:

$$e^{iZ} = \operatorname{Cos} Z + i \operatorname{Sin} Z \tag{73}$$

yang dikenal sebagai formula Euler.
Untuk membuktikan ini, kita dengan sederhana sekali hanya menggantikan Z dengan iZ pada persamaan (65) . Variasi-variasi pangkat i dapat menghasilkan salah satu dari empat bilangan-bilangan

$$i, -1, -i, +1$$

dengan memperhatikan, bahwa

$$i^2 = -1, \; i^3 = i^2 \, i = -i$$

$$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = +1, \; i^5 = i^4 \, i = i \text{ dan seterusnya.}$$

Bila n sebarang bilangan bulat, maka

$$i^{4n} = +1, \; i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1, \; i^{4n+3} = -i$$

Jadi:

$$e^{iZ} = 1 + iZ + \frac{(iZ)^2}{2!} + \frac{(iZ)^3}{3!} + \dots$$

$$= (1 - \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} - \frac{Z^6}{6!} + \dots) + i \, (Z - \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} - \frac{Z^7}{7!} + \dots)$$

$$= \operatorname{Cos} Z + i \operatorname{Sin} Z$$

kita telah mengenalnya deret-deret Sin Z dan Cos Z, persamaan (66) dan (67).
Jika kita gunakan formula Euler (73) dan Z diganti dengan -Z, maka kita peroleh

$$e^{-iZ} = \text{Cos } Z - i \text{ Sin } Z \qquad (74)$$

Saudara masih ingat pada fungsi trigonometri bahwa

$$\text{Cos } (-Z) = \text{Cos } Z \text{ dan}$$

$$\text{Sin } (-Z) = - \text{ Sin } Z$$

Selanjutnya jika (73) dan (74) kita jumlahkan dan dibagi dua, maka diperoleh:

$$\text{Cos } Z = \frac{1}{2} (e^{iZ} + e^{-iZ}) \qquad (75)$$

dan jika diperkurangkan kita peroleh:

$$\text{Sin } Z = \frac{1}{2i} (e^{iZ} - e^{-iZ}) \qquad (76)$$

selanjutnya

$$\tan Z = \frac{\sin Z}{\text{Cos } Z} = \frac{1 \ (e^{iZ} - e^{-iZ})}{i \ (e^{iZ} + e^{-iZ})}$$

dan dengan menggunakan persamaan (75) dan (76) kita peroleh

$$\text{Sin}^2 Z + \text{Cos}^2 Z = 1$$

Hal ini dibuktikan dengan jalan menjumlahkan kuadrat persmaan (75) dan (76) yaitu

$$\text{Sin}^2 Z + \text{Cos}^2 Z =$$

$$\frac{1}{4} (e^{2iZ} + 2e^{o} + e^{-2iZ}) - \frac{1}{4} (e^{2iZ} - Z\, e^{o} + e^{-2iZ})$$

$$= \frac{1}{4} (4 \ e^{o}) = 1$$

Persamaan (75) dan (76) menunjukkan betapa erat hubungannya antara fungsi sirkular biasa dengan fungsi hiperbola.
Kita masih ingat bahwa, bila u real fungsi hiperbolik

$\text{Cosh } u = \frac{1}{2}(e^{u} + e^{-u})$ dan

$\text{Sinh } u = \frac{1}{2}(e^{u} - e^{-u})$

Jika tempat u kita gantikan dengan Z maka

$$\text{Cosh } Z = \frac{1}{2}(e^{Z} - e^{-Z})$$

$$= 1 + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^5}{4!} + \frac{Z^6}{6!} + \ldots$$

$$\text{Sinh } Z = \frac{1}{2}(e^{Z} - e^{-Z})$$

$$= 1 + \frac{Z^3}{3!} + \frac{Z^5}{5!} + \frac{Z^7}{7!} + \ldots$$

Dari sini dan persamaan (75), (76) kita dapatkan:

$$\text{Cos } Z = \text{Cosh } iZ \qquad (77)$$

$$i \text{ Sin } Z = \text{Sinh } iZ \qquad (78)$$

Hubungan-hubungan tersebut tadi menunjukkan kesamaan bentuk antara identitas trigonometri sirkular seperti

$$\text{Cos}^2 Z + \text{Sin}^2 Z = 1 \qquad (79)$$

dan hubungan identitas trigonometri hyperbola, seperti:

$$\text{Cosh}^2 u - \text{Sinh}^2 u = 1 \qquad (80)$$

Dalam kenyataannya, sebarang identitas dari fungsi sirkular menghasilkan hubungan identitas dalam fungsi hyperbola asalkan Sin^2 diganti dengan $-\text{Sinh}^2$. Tanda kurang ini merupakan konsekuensi dari i dalam persamaan (78).

A. Bahan Latihan

1) Ambil $Z = (1 + i) / \sqrt{2}$ calam $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$

seperti persamaan (65), dan hitung:

$(1 + i)_e / \sqrt{2}$

dengan menggunakan empat buah suku pertama deret itu

2) Bila x dan y real, tunjukkan bahwa $/ e^{x + iy} / = e^x$

3) Tunjukkan bahwa bagian real dan imaginer $w = e^z$ sesuai dengan persamaan Couchy Reimann.

4) Tunjukkan bahwa Sin (iZ) = i Sinh Z, dan Cos (iZ) = Cosh Z.

5) Tunjukkan bahwa bila x dan y real berlaku $|\text{Sin } (x + iy)| = \text{Sinh}^2 y + \text{Sin}^2 x$. Demikian pula

$$|\text{Cosh } (x + iy)| = \sqrt{\text{Cos}^2 y + \text{Sinh}^2 x}$$

6) Tunjukkan bahwa Cosh (x + iy) = Cosh x Cos y + i Sinh x sin y.

VIII LOGARITMA

Dalam uraian yang lewat kita telah mengemukakan bahwa logaritme (sebagai sebuah invers dari kepangkatan) adalah sebuah multipel value dari fungsi Z. Kenilaian multipel itu diperkenalkan dengan sudut polar (kutub) θ. Hal itu kita tulis

$$Z \ r \ \text{Cis } \theta$$

atau seperti yang telah kita lakukan dalam formula Euler.

$$Z = r e^{i\theta} \tag{81}$$

dan ditanya bahwa:

$$\log Z = \log r + \log e^{i\theta}$$

$$= \ln r + i\theta \tag{82}$$

Kemudian sudut θ boleh diberikan dengan nilai utama θ_o, $-\pi < \theta_o < \pi$.
Yang menghasilkan nilai utama dari log Z.

$$\ln Z = \ln r + i\theta_o$$

$$-\pi < \theta_o < \pi \qquad (83)$$

Tetapi banyak nilai θ yang lain yang akan tetap menghasilkan Z yang sama seperti persamaan (81)
misalnya

$$\theta = \theta_o + 2\,n\pi \;,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \qquad (84)$$

dan masing-masing θ yang akan timbul adalah sebuah nilai dari log Z,
misal

$$\log Z = \ln r + i\,(\theta_o + 2n\pi) \qquad (85)$$

Dalam bentuk-bentuk nilai utama, kita adalah

$$\log Z = \ln r + 2\,n\,\pi\,i \qquad (86)$$

dengan demikian semua dari berbagai nilai yang berbeda-beda dari log Z, lebih berbeda dengan nilai utama dengan tambahan kecepatan bilangan bulat dari $2\pi i$.

Contoh:

Cari nilai log (1+i)

Penyelesaian

Bilangan komplek 1+i, bila diubah jadi disajikan dalam koordinat kutub menjadi. $r = 2$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

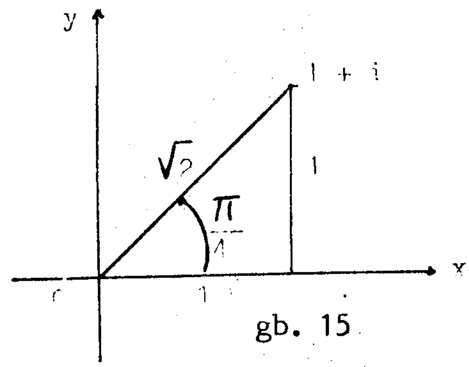
maka:

$$1+i = \sqrt{2}\; e^{i\left(\frac{\pi}{4} + 2\,n\pi\right)}$$

dan

$$\log(1+i) = \ln\sqrt{2+i}\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

$n = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots$



gb. 15

A. BAHAN LATIHAN

1. Cari nilai utama log z dari setiap bilangan komplek z berikut:
   a) $2+2i$ b) $\sqrt{3+i}$ c) -4
   d) 4 e) $2i$ f) $\dfrac{1+i}{1-e}$

2. Cari semua nilai log z dari setiap bilangan kompleks z:
   a) 2 b) -2 c) $2i$
   d) $-2i$ e) $i - \sqrt{3}$

3. Nyatakan $w = \tan Z$ dalam bentuk kepangkatan, kemudian selesaikan untuk Z dalam bentuk w dan tunjukkan bahwa

$$\tan^{-1} w = \frac{1}{2i} \cdot \log \frac{1 + iw}{1 - iw}$$

4. Tunjukkan bahwa

$$\sin^{-1} Z = -i \log\left(iZ + \sqrt{1 - Z^2}\right)$$

5. Cari $\sin^{-1} 3$

6. Buat gambar pada bidang w dari himpunan-himpunan dalam bidang Z dalam fungsi $w = \ln Z$
   a) $|Z| =$ constan $-\pi < \arg Z < \pi$
   b) $\arg Z =$ constan $0 < |Z| < \infty$

IX RUJUKAN DAN LATIHAN

1. Tentukan sistem bilangan kompleks

2. Tentukan untuk bilangan kompleks, konsep dari kesamaan, penjumlahan, perbanyakan dan pembagian.

3. Tertutupkah sistem bilangan kompleks terhadap operasi perjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian (dengan bilangan $\neq 0$) dan penaikan pangkat (termasuk pangkat kompleks)

4. Bagaimana bilangan kompleks a + ib disajikan dengan grafik dalam sebuah diagram Argand !

5. Ilustrasikan pada diagram Argand bagaimana nilai mutlak dan argumen dari hasil kali dan hasil bagi dari dua buah bilangan kompleks Z_1 dan Z_2, mengenai hal nilai mutlak dan argumen Z_1 dan Z_2.

6. Dengan teori Moivre, bentangkan bagaimana menyatakan Cos n θ dan Sin n θ sebagai suku banyak dalam Cos θ dan Sin θ.

7. Buktikan bahwa bila n bilangan genap positif, maka Cos n θ dapat dinyatakan dalam suku banyak dengan koefisien bilangan bulat dalam $\cos^2 \theta$. (contoh $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$)

8. Gunakan sebuah diagram Argand dan bentangkan bagaimana mendapatkan n kompleks dari akar pangkat n dari sebarang bilangan kompleks a + ib.

9. Pada sebuah diagram Argand ilustrasikan bagaimana konjugat dan resiprok dari bilangan kompleks a + ib yang menyangkut hal bilangan itu.

10. Bila konjugat sebuah bilangan kompleks sama dengan bilangan itu, dapatkah saudara menunjukkan bilangan itu.

11. Bila Z bilangan kompleks dan berlaku bahwa $Z = -\bar{Z}$, apa yang dapat saudara simpulkan?

12. Apakah lokasi dari variabel kompleks Z bila
    a) $(Z - \alpha| = k$ b) $|Z - \alpha| < k$
    c) $|Z - \alpha| > k$ dan bila

    $\alpha = a + ib$ adalah sebuah bilangan kompleks dan k adalah bilangan nyata tetap dan positif?

13. Tentukan konvergensi dari deret bilangan kompleks.

14. Bagaimana kita lakukan untuk menentukan e^2, Sin Z, Cos Z, log Z, dan tan Z untuk bilangan kompleks Z = x + iy?

15. Bagaimana akan saudara tentukan Z^{α} untuk bilangan kompleks Z dan α. Ilustrasikan untuk Z = 1 + i, α = 2i.

KEPUSTAKAAN

1. FRANK AYRES. JR
THEORY AND PROBLEM CALCULUS
ARMICO, BDG

2. HARDY AND WRIGHT
INTRODUCTION TO THE THEORY OF NUMBERS
OXFORD UNIVERSITY PRESS

3. LEDERMANN
COMPLEX NUMBERS.
ROUTLEDGE, THETFORD, NORFOLK.

4. STEPHENSON. G
MATHEMATICAL METHODS FOR SCIENCE STUDENTS
LOWE AND BRYDONE LTD, THETFORD, NORD FOLK.